

**ПИТАННЯ ДО ІСПИТУ З КУРСУ «КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»  
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ  
ІІІ КУРС (VI СЕМЕСТР), 2024 Р.**

**РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ.**

**Тема 1. Комплексна площина та функції комплексної змінної.**

1. Комплексні числа, дії з комплексними числами. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа.  $\sqrt[n]{z}$ ,  $z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , формула Муавра.
2. Топологія комплексної площини, розширена комплексна площина, стереографічна проекція (сфера Рімана).
3. Означення функцій комплексної змінної. Функції  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $z^w$ .
4. Функції комплексної змінної, криві, області.

**Тема 2. Диференційованість функцій, голоморфні та гармонічні функції**

1. R- та C- диференційованість функцій комплексної змінної.
2. Умови Коші-Рімана.
3. Означення голоморфної функції.
4. Геометричний зміст модулю та аргументу голоморфної функції.
5. Гармонічні функції. Властивості гармонічних функцій.
6. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.

**Тема 3. Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.**

1. Означення інтегралу вздовж кривої та його властивості.
2. Зв'язок з криволінійними інтегралами.
3. Формула Ньютона-Лейбниця. Первісна.
4. Теорема Коші для трикутника.
5. Теорема Коші для замкненої кривій в однозв'язній області.
6. Теорема Коші для функції, неперервної в замкненій області.

**Тема 4. Інтегральна формула Коші та її застосування**

1. Інтегральна формула Коші.
2. Диференціювання інтегралу типа Коші.
3. Нескінченна диференційованість голоморфних функцій. Теорема Морери.
4. Теорема Вейерштрасса про рівномірно збіжну послідовність голоморфних функцій.
5. Степеневі ряди.
6. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд.
7. Нерівність Коші для коефіцієнтів степеневого ряду.
8. Теорема Ліувілля.

**РОЗДІЛ 2. НУЛІ, ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВОСТІ, ЛИШКИ.**

**Тема 5. Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.**

1. Нулі голоморфних функцій
2. Перша теорема єдності.
3. Теорема про те, що нулі не можуть згущатися.
4. Безпосереднє аналітичне продовження.
5. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.

**Тема 6. Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.**

1. Ряд Лорана, розклад голоморфної функції в ряд Лорана.

2. Визначення характеру ізольованих особливих точок.
3. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.
4. Лишки. Обчислювання лишків.
5. Теореми Коші про лишки.

#### **Тема 7. Застосування теореми Коші про лишки.**

1. Обчислення інтегралів по замкненому контуру.
2. Лема Жордана
3. Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій.
4. Обчислення невластивих інтегралів.
5. Підсумовування рядів.

### **РОЗДІЛ 3. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.**

#### **Тема 10. Елементарні конформні відображення.**

1. Означення конформного відображення.
2. Необхідні та достатні умови конформності.
3. Дробово-лінійні відображення та їх властивості.
4. Функції  $\sqrt[n]{z}$ ,  $z^n$  та їх властивості.
5. Функції  $e^z$ ,  $\ln z$ , та їх властивості.
6. Властивості функції Жуковського та оберненої до неї.
7. Побудова конформних відображення однозв'язних областей за допомогою основних функцій: дробово-лінійної,  $\sqrt[n]{z}$ ,  $z^n$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ , функції Жуковського та оберненої до неї.

#### **Тема 11. Основна теорема теорії конформних відображень.**

1. Конформні автоморфізми та ізоморфізми.
2. Зв'язок між конформністю та голоморфністю для відображень.
3. Класи конформно-еквівалентних областей.
4. Теорема Пенлеве про зникнення особливостей.
5. Принцип симетрії Рімана-Шварца.

**ТЕМИ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

№ З/П	НАЗВА ТЕМИ	КІЛЬКІСТЬ ГОДИН
1	<b>Комплексна площина та функції комплексної змінної.</b> Комплексні числа, дії з комплексними числами. Тригонометрична та показникові форми комплексного числа. Формули Ейлера і Муавра. Корень n-го степеня з комплексного числа. Розв'язування квадратних рівнянь з дійсними коефіцієнтами та комплексною змінною, розв'язування рівнянь вищих порядків. Комплексна площина, розширена комплексна площина, стереографічна проекція (сфера Рімана). Функції комплексної змінної, криві, області.	4
2	<b>Диференційованість функцій комплексної змінної, голоморфні та гармонічні функції.</b> R- та C- диференційованість функцій комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. Означення голоморфної функції. Функції. Гармонічні функції та їх властивості. Зв'язок гармонічних та голоморфних функцій. Відновлення голоморфної функції за заданою дійсною частиною.	2
3	<b>Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.</b> Означення інтегралу вздовж кривої та його властивості. Зв'язок з криволінійними інтегралами. Формула Ньютона-Лейбниці, первісна. Теорема Коші.	2
<b>МОДУЛЬ 1 (дистанційно, контрольна робота)</b>		
4	<b>Інтегральна формула Коші та її застосування.</b> Інтегральна формула Коші та її застосування. Диференціювання інтегралу типу Коші. Степеневі ряди. Розклад голоморфної функції в степеневий ряд.	3
5	<b>Нулі голоморфних функцій та безпосереднє аналітичне продовження.</b> Нулі голоморфних функцій. Безпосереднє аналітичне продовження. Особливості степеневого ряду на межі кола збіжності.	1
6	<b>Ряд Лорана та ізольовані особливі точки.</b> Ряд Лорана, розклад голоморфної функції в ряд Лорана. Визначення характеру ізольованих особливих точок. Лишки. Обчислювання лишків.	2
7	<b>Застосування теореми Коші про лишки (простіші приклади)</b> Теорема Коші про лишки. Обчислення інтегралів по замкненому контуру. Лема Жордана. Обчислення інтегралів від тригонометричних функцій. Обчислення невластивих інтегралів. Підсумовування рядів.	2
<b>МОДУЛЬ 2 (дистанційно, індивідуальна розрахункова робота)</b>		
<b>ВСЬОГО</b>		<b>16</b>

<b>МОДУЛІ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.</b>		<b>БАЛЛИ</b>
<b>МОДУЛЬ 1.</b> <b>Комплексні числа.</b> <b>Функції комплексної змінної.</b> <i>(контрольна робота)</i>	<b>Тема 1.</b> Комплексна площина та функції комплексної змінної. <b>Тема 2.</b> Диференційованість функцій комплексної змінної, голоморфні та гармонічні функції. <b>Тема 3.</b> Інтеграл від функції комплексної змінної та теорема Коші.	<b>30</b>
<b>МОДУЛЬ 2.</b> <b>Інтегральна теорема Коші. Ряди Лорана.</b> <b>Лишки.</b> <i>(індивідуальна розрахункова робота)</i>	<b>Тема 4.</b> Інтегральна формула Коші та її застосування. <b>Тема 6.</b> Ряд Лорана та ізольовані особливі точки. <b>Тема 7.</b> Застосування теореми Коші про лишки.	<b>30</b>
<b>ЗАГАЛЬНА СУМА БАЛІВ (ПРАКТИКА):</b>		<b>60</b>

## ПРИКЛАД ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО БІЛЕТА/ ЗАВДАННЯ КОЛОКВІУМУ:

### ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № \*/ЗАВДАННЯ № \*

1. Умови Коші-Рімана. Означення голоморфної функції. Навести приклад. (10 балів)

2. Обчислити  $\int_L z \cdot |z| dz$ , де  $L: |z| = 1, \text{Im } z \leq 0$ . (5 балів)

3. Обчислити  $\sqrt[4]{2 + i\sqrt{12}}$ . Зобразити отримані корені на комплексній площині. (5 балів)

### ОЦІНКА:

№ ЗАВДАННЯ	БАЛИ	ПОЯСНЕННЯ
1	10	<b>10</b> балів – відповідь повна та вірна, наведено приклад. Вірна, тобто присутні повні формули, вірні визначення, повні теореми та твердження (з доведенням, де це вказано у білеті). <b>9-4</b> балів – відповідь повна та вірна, не наведено приклад; помилки у формулюванні, або неповністю; відсутнє доведення твердження/теореми або формули, якщо це вказано. <b>3-1</b> – вірні формулювання; приклади відсутні
2,3	5	<b>5</b> балів – завдання виконане вірно; наведено формули, твердження, які було використано під час обчислення (теоретичне пояснення); є малюнок (завдання теми 3,4, 7). <b>4-3</b> балів – відповідь має помилки або відповідь записано не в кінцевому вигляді; присутня теоретичне пояснення; відсутність малюнка (завдання теми 3,4, 7); завдання в цілому виконане вірно, але відсутнє теоретичне пояснення, відсутність малюнка (завдання теми 3,4, 7). <b>3-1</b> – завдання має помилки; відсутнє теоретичне пояснення та малюнок (завдання теми 3,4, 7); завдання не виконане, але виписані необхідні формули/теореми й є малюнок (завдання теми 2, 3,4, 6).
<b>ИТОГО</b>		<b>40</b>

### ЛІТЕРАТУРА:

#### ОСНОВНА

- Єжов С.М., Разумова М.А. *Теорія функцій комплексної змінної*. навчальний посібник, К, ВПЦ «Київський університет», 2012
- Комплексний аналіз. Приклади і задачі*. (за редакцією В.Г.Самойленка). КНУ ім.Т.Шевченка., 2010.
- Павленко А.В., Кагадій Л.П., Копорулін В.Л. *Теорія функцій комплексної змінної*. навчальний посібник, Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012

#### ДОПОМІЖНА

- L. Ahlfors. *Complex analysis*. N.J., "Kluwer", 1981.
- Ангилейко И.М., Козлов Р.П.В. *Задачи по теории функции комплексной переменной*, Минск. Высшая школа, 1976.
- Лунгу К.Н., Норін В.П., Письменний Д.Т. *Збірник задач з вищої математики, 2 курс*. Айріс-Пресс, 2007.